INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS DE LA INGENIERÍA - CURSO CERO
Asignatura: MATEMÁTICAS.

HOJA 2: Límites. Continuidad y Derivabilidad de funciones reales de variable real.

2.1 Halla el dominio y el recorrido de las funciones:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$ b) $y = \ln(x^2 - x - 6)$

2.2 Representar gráficamente las funciones ($E(\cdot)$ es la función *parte entera*):

a) $y = |x+2|$ b) $y = E(\frac{x}{3} - 1)$

2.3 Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones e indica su dominio:

a) $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$ b) $y = 2 + \sqrt{x+1}$

2.4 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3+5x^2}{6x^4-x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+5x^2-6}{x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+5x^2}{6x^4-x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ e) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}}{x^2-7x+6}$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+x^2}{(x+3)^4(x^2-1)}$ h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2}{(x+3)^4(x^2-1)}$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x^2}{(x+3)^4(x^2-1)}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ k) $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2-3x+5\right)^{\frac{7}{(x-2)^5}}$ l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+7}{2x-6}\right)^{\sqrt{4x^2+x-3}}$

2.5 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \cos(2x)$,

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos(2x)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{4x^4+3x-5}}\right)$

2.6 Estudia el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 3$, b) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-9}$ c) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+9}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ f) $f(x) = \dfrac{x+5}{\cos^2(x)+9}$

2.7 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 11x + 18}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}, & \text{si } x \neq 2 \\ -1, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{11x - 18}{x + 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 1, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si } x < \pi \\ -1 + \operatorname{sen} x, & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln |x|, & \text{si } x \neq 0 \\ -1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2.8 Determina los valores de las constantes a y b que hacen que las siguientes funciones sean continuas en toda la recta real:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 \operatorname{sen} 2x}{3x}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{a - 2x}{a^2 + x^2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq -1, \\ ax + b, & \text{si } -1 < x < 3, \\ -2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

2.9 Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x \ln x$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{\cos x}}$

d) $f(x) = xe^x \operatorname{sen} x$ e) $f(x) = \ln \sqrt{\cos x}$ f) $f(x) = \arctan \left(x^2 - 3\right)$

g) $f(x) = 3^{x+1}$ h) $f(x) = (x + 1)^3$ i) $f(x) = (x + 1)^x$

2.10 Halla las derivadas de las siguientes funciones dadas, con a y b números reales positivos:

a) $f(x) = \dfrac{1}{b^2} (a + bx - a \ln(a + bx))$ b) $f(x) = \dfrac{-1}{ax} + \dfrac{b}{a^2} \ln \dfrac{a + bx}{x}$ c) $f(x) = \ln \dfrac{e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}}{e^x - \sqrt{e^{2x} - 1}}$

d) $f(x) = \tan(\operatorname{arc\,sen} x)^2$ e) $f(x) = \arctan(x^2 - 1)$ f) $f(x) = \arccos \left(\dfrac{5 \cos x + 3}{3 \cos x + 5}\right)$

2.11 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto indicado:

a) $f(x) = x^2 - \ln x$, $(1, 3)$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $(-2, 1/4)$

c) $f(x) = x^2 + 1$, $(2, 5)$, d) $f(x) = x + 1/x$, $(1, 2)$

2.12 Calcula los siguientes límites, usando la regla de L'Hôpital si fuera necesario:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{e^x}\right)^{1/(x-1)^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\arctan x - \pi/4}{x - 1}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x - 1}{\ln(1 + x)}$ e) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$ f) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} (\tan x - \sec x)$

2.13 Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones y calcula su derivada en los puntos en los que sea derivable:

a) $h_1(x) = \sqrt[3]{x}$ b) $h_2(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ c) $h_3(x) = |x-4|$ d) $h_4(x) = \left|x^2-1\right|$

2.14 Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones definidas a trozos y calcula su derivada en los puntos en los que sea derivable:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 1 \\ 2x-1, & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ -x+1, & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \le 0 \\ x, & \text{si } 0 < x \le 2 \\ e^x, & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

2.15 Realiza un esbozo de cada una de las siguientes funciones calculando aquellos datos que sean necesarios; dominio, crecimiento, asíntotas, concavidad, puntos de corte con los ejes, etc.

a) $f_1(x) = \frac{x+2}{(x-1)^3}$ b) $f_2\,(x) = \frac{x^2-1}{x+11}$ c) $f_3(x) = \frac{1}{1+e^x}$

d) $f_4(x) = \ln\left[(x-1)(x-2)\right]$ e) $f_5(x) = 2\operatorname{sen} x + 2\cos x$

2.16 Una partícula que se mueve en el plano XOY baja deslizándose a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{x^2+9}$. En el punto $P(4,5)$ abandona la curva y sigue por la recta tangente a dicha curva.

a) Calcular el punto R del eje OY por el que pasará la partícula.

b) ¿Existe algún otro punto Q de la curva tal que la recta tangente a la curva en el punto Q corte al eje OY en el mismo punto R anterior?

2.17

a) Calcula α de manera que la recta $y = 2x + \alpha$ sea una asíntota de la gráfica de la función f definida (para $x \neq -1$) por

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+5}{x+1}$$

b) Para dicho valor de α, analiza si la gráfica de la función f está por encima, por debajo o corta a la asíntota en el intervalo $(0,3)$.

2.18 Indica, razonando las respuestas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La recta $y = -1$ no es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{|x|\,(x-3)}{9-x^2}$.

b) La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la función $g(x) = \dfrac{\cos(x-2)}{x-2}$.

c) La pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ en el punto $P(1,1)$ no es 7.

d) El mínimo absoluto de la función $h(x) = 2x^3 - 6x + 7$ restringida al intervalo $[2,6]$ se alcanza en el punto $x = 2$.

Tabla de derivadas

En la siguiente tabla se recogen las derivadas de las funciones elementales. Las letras r, k y a indican constantes, siendo $a > 0$.

La función $u = u(x)$ que aparece en la segunda columna, es una función arbitraria de la variable x.

$(k)' = 0$	
$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(u^r)' = ru^{r-1}u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u'a^u \ln a$
$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\tan u)' = u' \sec^2 u$
$(\operatorname{cotan} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$	$(\operatorname{cotan} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\sec u)' = u' \sec u \tan u$
$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x$	$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotan} u$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\operatorname{arc} \cos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arc} \cos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$