INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS DE LA INGENIERÍA - CURSO CERO
Asignatura: MATEMÁTICAS.

HOJA 3: Integración de funciones reales de variable real.

3.1 Verifica la igualdad probando que las derivadas de los miembros de la derecha coinciden con los integrandos de los de la izquierda (C es una constante arbitraria

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-7}} = \ln\left(\sqrt{x^2+4x-7}+x+2\right)+C.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1-2\cos x}{5-4cosx}dx = \arctan\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x-2}+C.$

(c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}dx = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}-x+C.$

(d) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x dx = \frac{1}{8}(C-2x\cos 2x+\operatorname{sen} 2x).$

3.2 La gráfica de una cierta función f tiene pendiente $4x^3-5$ en cada punto (x,y), y pasa por el punto $(1,2)$. Halla la función f.

3.3 Calcula las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int xe^{-x}dx,\quad \int \ln x dx,\quad \int x\ln x dx$

(b) $\displaystyle\int x\ln x^2 dx,\quad \int \arctan x,\quad \int x^2\cos x dx$

(c) $\displaystyle\int e^{2x}\cos x dx,\quad \int x^3e^{2x}dx,\quad \int x\cos 2x dx$

3.4 Resuelve las siguientes integrales mediante un cambio de variable adecuado.

(a) $\displaystyle\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}dx,\quad \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

(b) $\displaystyle\int e^{x^2+4x+5}(x+2)dx,\quad \int \frac{e^x}{1+e^x}dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x/2)}{4+x^2}dx,\quad \int (\tan 3x+\tan 5x)dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2}dx,\quad \int \frac{x^2}{x^6+1}dx.$

3.5

(a) Haciendo el cambio de variables $1 - x = t^6$, halla

$$\int_{-63}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{1-x}}.$$

(b) Prueba que la ecuación $x^3 - 3x^2 - 9x + 8 = 0$ posee una sóla solución real. Especifica un intervalo de longitud 0,5 que contenga dicha solución.

3.6

(a) Dibuja la región del primer cuadrante delimitada por el arco de curva de ecuación $y = x^2\sqrt{2-x}$ y el eje OX.

(b) Calcula el área de la región que delimita.

(c) Calcula el volumen del sólido engendrado al gira dicha región alrededor del eje OX.

3.7 Prueba que entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio $r > 0$ existe al menos uno de perímetro máximo y determina las dimensiones de uno de esos rectángulos.

3.8 Determina los números a, b y c para que la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{ax^2 + bx + c}$$

tenga las siguientes propiedades: la recta $y = x - 2$ es una asíntota de la gráfica de f y en $x = -3$ la función presenta un extremo relativo.

3.9 Sea f la función definida para $x > 0$ por $f(x) = x(\ln x)^2$.

(a) Calcula el límite lateral de f cuando $x \longrightarrow 0$ por la derecha.

(b) Halla, si es que existen, los extremos relativos y absolutos de f.

3.10 Para cada $r \geq 1$ se define la función $f_r : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ mediante la relación $f_r(x) = x^r$.

(a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f_r en el punto $(1, 1)$

(b) Dibuja la región limitada por la gráfica de f_r su tangente en el punto $(1, 1)$ y el eje OX. Calcula el área $A(r)$ de dicha región.

(c) ¿Para qué valores de $r \geq 1$ es el área $A(r)$ máxima?

3.11 Al aplicar integración por partes para evaluar

$$\int f(x) \operatorname{sen} x dx$$

donde f es una cierta función derivable, se obtiene

$$\int f(x) \operatorname{sen} x dx = -f(x) \cos x + \int 3x^2 \cos x dx$$

Sabiendo que $f(1) = 2$, encuentra la expresión de $f(x)$.

3.12 Determina un polinomio de segundo grado p sabiendo que verifica las tres condiciones siguientes:

(a) $p(2) = p(-2) = 0$.

(b) tiene un máximo relativo en $x = 0$, y

(c) el área de la región encerrada por el eje OX y la curva $y = p(x)$ es 32.

3.13 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$$

Sea P el punto de corte de la gráfica de f con su asíntota. Determina la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.

3.14 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función polinómica definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(a) Halla todas las ternas de números reales a, b y c para las que la correspondiente f tiene un mínimo en $x = 1$ y, además, la gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

(b) Para cada una de las ternas halladas en el apartado anterior calcula

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$$

3.15 Sea considera la función $f : \left[\frac{1}{2}, 2\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$$

(a) Calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

(b) Demuestra que la ecuación

$$\frac{x}{x^4 + 3} = \frac{1}{5}$$

tiene alguna solución real.

3.16 Un objeto se mueve a lo largo de una linea recta debido a la acción de una fuerza F que depende continuamente de la posición x del objeto en dicha línea recta. Se sabe que el trabajo realizado por la fuerza para mover el objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dado por

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

(a) Si la fuerza es $F(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$, calcula el trabajo para ir desde $x = 3$ hasta $x = 5$.

(b) Determina razonadamente si la fuerza $G(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que la fuerza F anterior para el mismo desplazamiento.

3.17 Si una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, se llama valor medio de f en el intervalo $[a, b]$ al número

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

(a) Encuentra el valor medio de la función f definida por $f(x) = x \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Determina razonadamente, y sin calcular la integral, si el valor medio de la función $g(x) = \dfrac{x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^3 x}$ es mayor o menor que el de f en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.18 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

(a) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en su punto de inflexión.

(b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f, la recta tangente en su punto de inflexión y el eje OY.

(c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

3.19

(a) Si el precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso, demuestra que siempre se pierde valor al partirlo en dos trozos.

(b) Como puedes suponer, puede partirse en dos trozos con diferentes pesos de múltiples formas. Determina la partición que origina la máxima perdida de valor. Razona tu respuesta.

Tabla de integrales

En la siguiente tabla están las integrales indefinidas (primitivas) de las funciones elementales. En ellas k es una constante, a es una constante positiva y c es la constante de integración. La función $u = u(x)$ que aparece en la segunda columna es una función arbitraria de la variable x.

$$\int k dx = kx + c$$

$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$	$\int u^k u' dx = \frac{u^{k+1}}{k+1} + c, \qquad k \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^u u' dx = e^u + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^u u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$	$\int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + c$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + c$
$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$	$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + c$
$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotan} x + c$	$\int u' \operatorname{cosec}^2 u dx = -\operatorname{cotan} u + c$
$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$	$\int u' \sec u \tan u dx = \sec u + c$
$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x dx = -\operatorname{cosec} x + c$	$\int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotan} u dx = -\operatorname{cosec} u + c$
$\int \tan x dx = -\ln\|\cos x\| + c$	$\int u' \tan u dx = -\ln\|\cos u\| + c$
$\int \operatorname{cotan} x dx = \ln\|\operatorname{sen} x\| + c$	$\int u' \operatorname{cotan} u dx = \ln\|\operatorname{sen} u\| + c$
$\int \sec x dx = \ln\|\sec x + \tan x\| + c$	$\int u' \sec u dx = \ln\|\sec u + \tan u\| + c$
$\int \operatorname{cosec} x dx = -\ln\|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x\| + c$	$\int u' \operatorname{cosec} u dx = -\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotan} u\| + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + c$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} u + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + c$